Autonomní rovnice:

(A) $\quad y' = g(y)$ $\qquad$ (kde g je spojitá).

<u>Cíl:</u> Zjistit co nejvíc o chování řešení, aniž bychom znali přesné vzorce pro ř.:

Kvalitativní analýza (A)

<u>Věta 2.27</u>: Libovolné <u>řešení</u> (A) je monotónní.
(Tj. buďto nekles. na celém svém def. oboru nebo nerostoucí — " —)

Řešení: je maximální, pokud se nedá prodloužit.
- uvažujeme řešení def. na ot. intervalech

<u>Důkaz</u>: Nechť $y(x)$ je řešení rce (A) na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak $y(x)$ má derivaci na I: musí totiž jít dosadit do rce (A), kde vystupuje y'. Navíc $y' = g(y) \in \mathbb{R}$ (fce g má hodnoty v $\mathbb{R}$).

Vzpomeneme si na 1. SEM.:
- y je neklesající na I $\iff$ $\boxed{\forall x \in I: y'(x) \geq 0}$
- $\quad$ nerostoucí $\qquad \boxed{\forall x \in I: y'(x) \leq 0}$

SPOREM: nechť neplatí ani jedna alternativa.
Pak $\exists a, b \in I$: $y'(a) > 0 \wedge y'(b) < 0$.
Zřejmě $a \neq b$, protože $y'(a) \neq y'(b)$. Navíc
$$g(y(a)) \overset{(A)}{=} y'(a) \neq y'(b) \overset{(A)}{=} g(y(b)),$$
protože y je řešení rovnice (A). Máme
$$g(y(a)) \neq g(y(b)) \implies y(a) \neq y(b).$$
4 případy:

(i) $\quad a < b \wedge y(a) < y(b)$
(ii) $\quad a < b \wedge y(a) > y(b)$
(iii) $\quad a > b \wedge y(a) < y(b)$
(iv) $\quad a > b \wedge y(a) > y(b)$

Jsou analogické. Probereme pouze případ (i).

(i) $a<b \wedge y(a)<y(b)$.

navíc $y'(a) > 0 > y'(b)$ (SPOROPŘEDP.)

Položme

$Z = \{t\in I : t\geq a \wedge y(t) = y(b)\}$

$\alpha := \inf Z$. Z je zdola omezená, $Z \neq \emptyset$,

takže inf Z existuje $> -\infty$, $< \infty$.

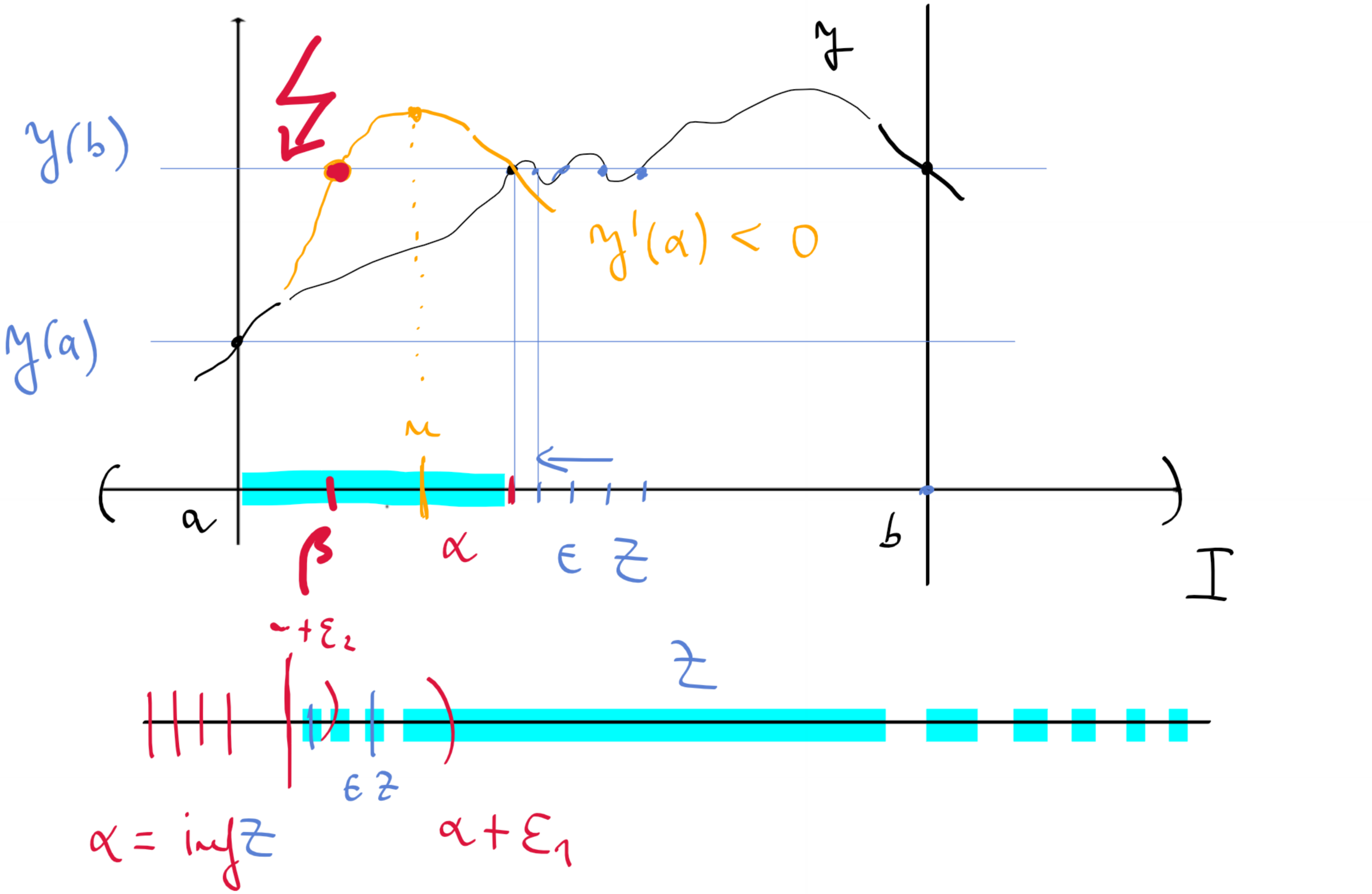
Tvrdím, že $\alpha \in Z$ (tj. $\alpha = \min Z$).

Z definice inf Z (největší dolní závora Z) plyne existence posloupnosti $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Z$ (může být i konstantní) splňující $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha = \inf Z$

y je ovšem spojitá na celém I, protože $y'(x)\in\mathbb{R}$, $x\in I$. Podle Heineho definice spoj.

$$y(\alpha) \overset{HV}{=} \lim_{n\to\infty} y(t_n) \overset{t_n\in Z}{=} \lim_{n\to\infty} y(b) = y(b).$$

Tj. $y(\alpha) = y(b)$, tj. $\alpha \in Z$. Tedy $\underline{\alpha > a}$

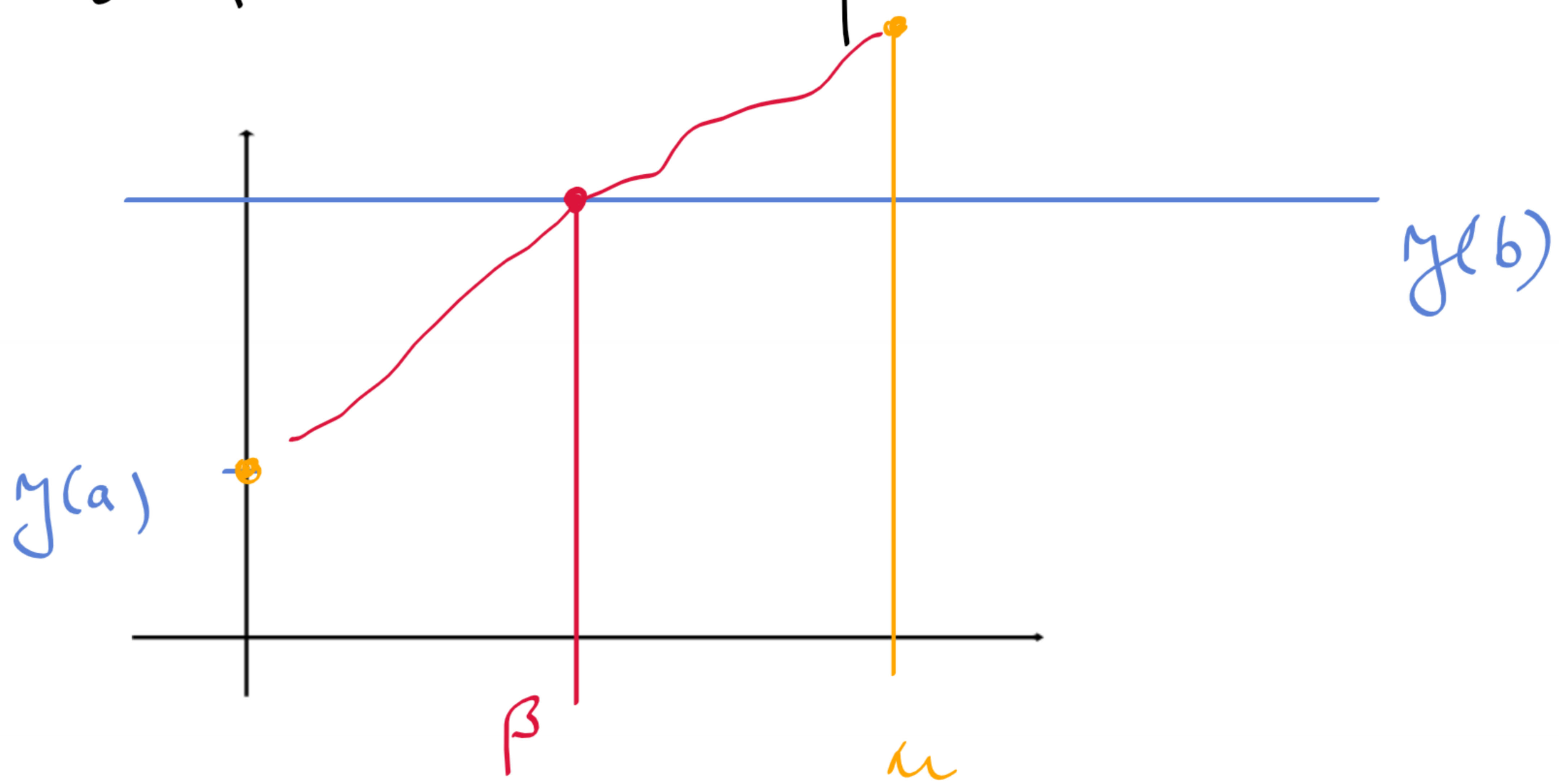


Nyní ovšem vidíme, že $y'(\alpha) \overset{(A)}{=} g(y(\alpha)) =$

$$y'(\alpha) \overset{(A)}{=} g(y(\alpha)) = g(y(b)) \overset{(A)}{=} y'(b) < 0.$$

Víme $y'(\alpha) < 0$. Tedy (cv. 1. SEM – def. derivace) existuje bod $u \in (a,\alpha)$. Podle Bolzanovy věty ze spojitosti y na intervalu $[a,u]$ plyne, že

že existuje bod $\beta \in [a, u]$, že $y(\beta) = y(b)$,
což znamená, že $\beta < u < \alpha$ & $\beta \in Z$.
Tedy $\beta < \min Z \wedge \beta \in Z$ $\lightning$.



Poznámka 2.28: Je-li y řešení rce (A), tj. $y' = g(y)$, na intervalu I splňující poč. podmínku $\boxed{y(x_0) = y_0}$ (kde $x_0 \in I$).
Pokud $g(y_0) > 0$, pak y je nekles. na I.

Protože: $y'(x_0) \overset{(A)}{=} g(y(x_0)) = g(y_0) > 0$
Tedy derivace y je aspoň v 1 b. > 0.
Ale y je monotónní $\Rightarrow$ y je neklesající.

Analogicky: $g(y_0) < 0 \Rightarrow y$ je nerostoucí.

Lemma 2.29. Buď y řešení (A) na intervalu (a, b) (kde $a, b \in \mathbb{R}^*$), nechť $c \in \mathbb{R}$.
Buď $\tilde{y}$ def. předpisem
$$\tilde{y}(x) = y(x + c).$$
Pak $\tilde{y}$ je řešení (A) na intervalu $(a-c, b-c)$.

Důkaz: $(\tilde{y})'(x) = y'(x+c) \cdot 1 \overset{(A)}{=} g(y(x+c)) =$
$[x \in (a-c, b-c) \Rightarrow x + c \in (a, b)]$
$= g(\tilde{y}(x))$. Tj. $(\tilde{y})'(x) = g(\tilde{y}(x))$.
Tj. $\tilde{y}$ je řešení rce (A). ∎

Poznámka 2.30: Připomeňme, že tzv. TRIV. RCE
pro tvaru: $y' = h(x)$, čili (T)

$$y = H(x), \quad \text{kde} \quad H' = h.$$

Jde o hledání PF.

Je-li y řešení (T) na I, pak

$$y_c(x) := y(x) + C$$

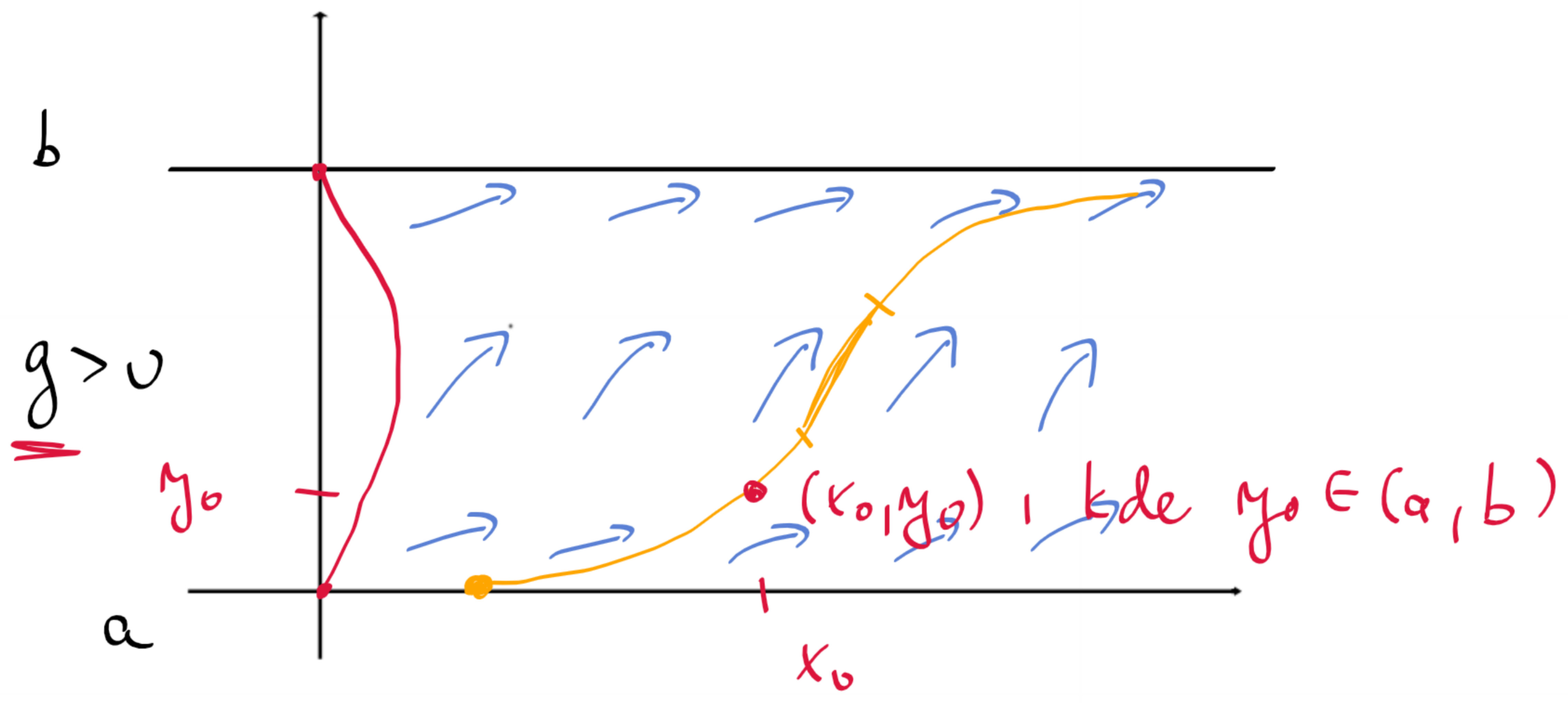
je taky řešení (T) na I. „Posunování $\updownarrow$"

Pro rovnici (A) „můžeme řešení posunovat $\leftrightarrow$"

Věta 2.32: nechť g je spojitá na D_g,
nechť $g > 0$ na (a,b) a $g(a) = g(b) = 0$.
nechť y je maximální řešení rce (A)
splňující P.P. $y(x_0) = y_0 \in (a,b)$.
Pak $(a,b) \subseteq H_y$ (obor hodnot y).

$$y' = g(y)$$

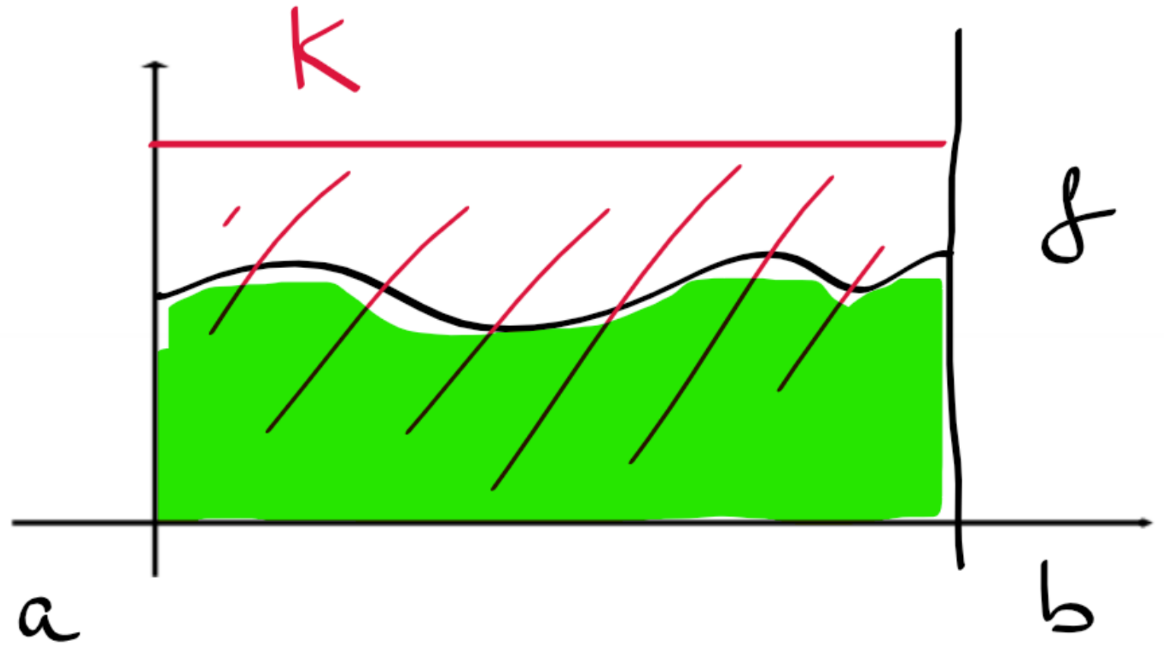
Stacionární řešení $\longleftrightarrow$ nulové body g.

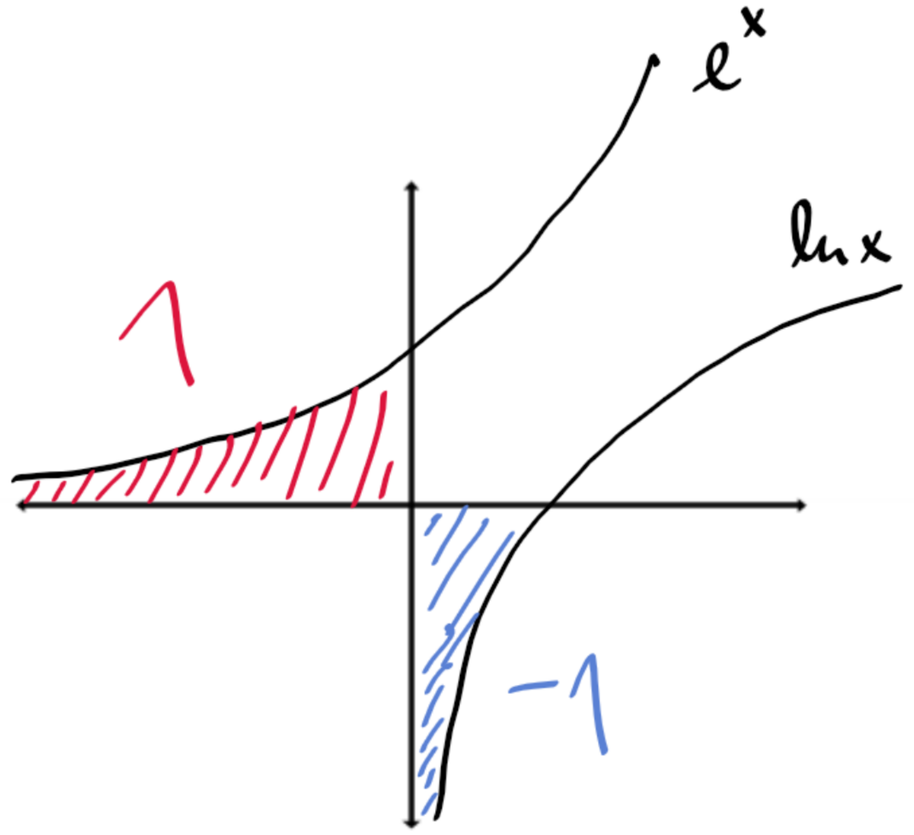


Ve skriptech připouštíme $a, b \in \mathbb{R}^*$
pokud např. $a = -\infty$, nepožadujeme $g(a) = 0$.
(To by byl nesmysl.)
Speciálně pro $(a,b) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ dostáváme,
že $H_y = \mathbb{R}$ pro y max.

KONVERGENCE (ZR)$\int$

Připomeň: $(R)\int_a^b f$ byl ve 2. SEM. def. a výhradně pro $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omezené.





Tedy pro $(R)\int_a^b$ otázka konvergence (konečnosti) není zajímavá. Ovšem $(ZR)\int_a^b$ je def. (i pro neomezené fce, popř. na neomezeném int.) pomocí limity $\Longrightarrow$ může mít nekonečnou hodnotu.

Př.: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^{\text{"}\infty\text{"}} = \text{"}\ln\infty - \ln 1\text{"} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty - 1 = \infty.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \lim_{x\to 0_+} \ln x = 1-(-\infty) = \infty$$

Fakt:

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ K. $\iff \alpha > 1$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ K. $\iff \alpha < 1$.

Věta (LSK) nechť $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $(a,b]$ kde $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$, jsou kladné, spojité. nechť existuje $\displaystyle\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (≥ 0). (a_+)

(i) $A\in(0,\infty) \Longrightarrow \left[\int_a^b f \text{ K.} \iff \int_a^b g \text{ K.}\right]$

(ii) $A = 0 \Longrightarrow \left[\int_a^b f \text{ K.} \Longleftarrow \int_a^b g \text{ K.}\right]$

(iii) $A = \infty \Longrightarrow \left[\int_a^b f \text{ K.} \Longrightarrow \int_a^b g \text{ K.}\right]$

- $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x]_0^1 - \int_0^1 1\,dx = 1\ln 1 - \lim_{x\to 0_+} x\ln x - 1$ $= -1$

[Z246] $\int_0^1 \overbrace{\frac{\ln x}{1-x^2}}^{f(x)}\,dx$

Rozdělíme na 2: $\int_0^{\frac12}\dots$, $\int_{\frac12}^1\dots$.

„U nuly": $\frac{\ln x}{1-x^2} \xrightarrow{\text{lim brýle}} \ln x =: g(x)$.

LSK: $A = \lim_{x\to 0_+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{\ln x}{1-x^2}}{\frac{\ln x}{1}} = \lim_{x\to 0_+}\frac{1}{1-x^2} = 1$

$A\in(0,\infty) \Rightarrow \left[\int_0^{\frac12} f \text{ K.} \iff \int_0^{\frac12} g \text{ k.}\right]$

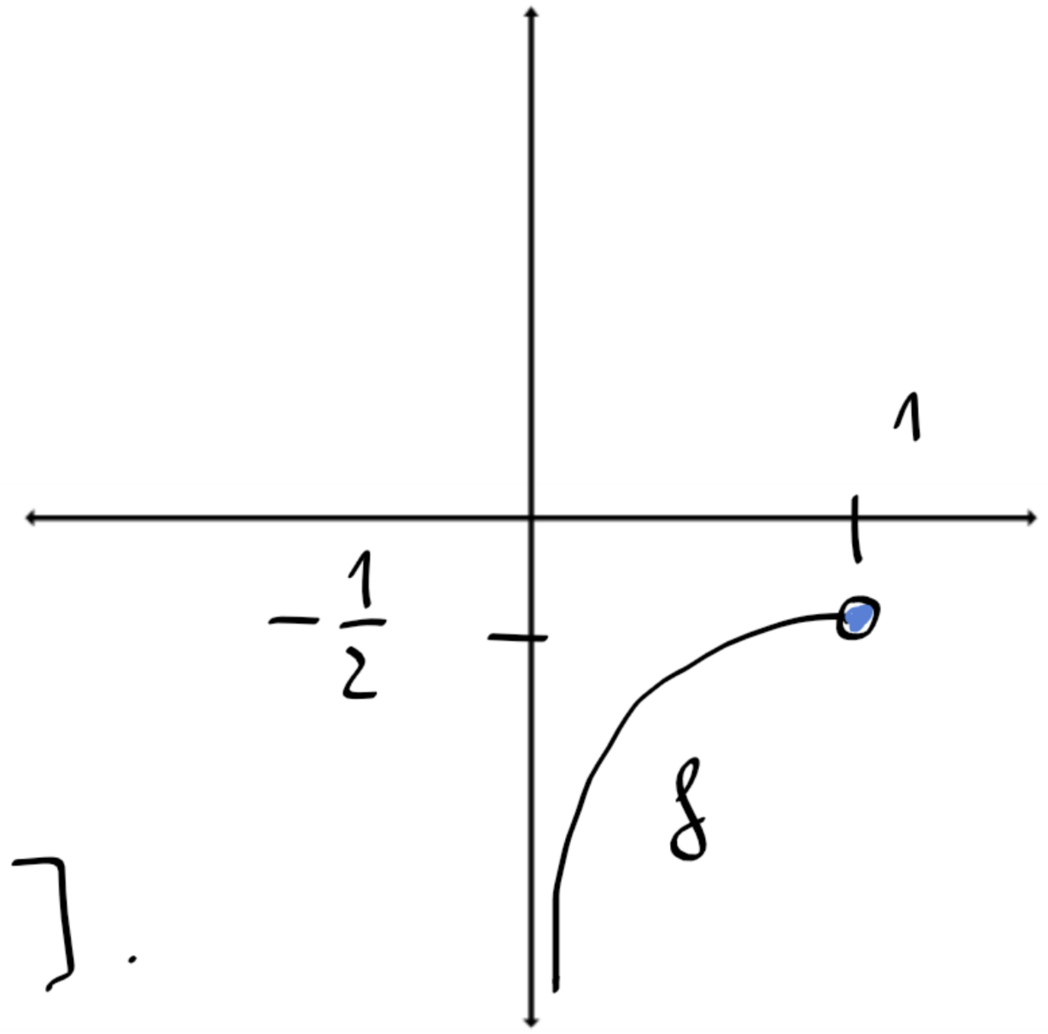
Víme $\int_0^{\frac12}\ln x\,dx < \infty$. $\Longrightarrow \int_0^{\frac12} f$ K. ✓

„U jedničky": $f(x) = \frac{\ln x}{(1-x)(1+x)}$

$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x} = \frac{-1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$

$= -\frac12$. My můžeme ji f dodefinovat:

$\hat f(x) = \begin{cases}\frac{\ln x}{1-x^2}, & x\in(0,1)\\ -\frac12, & x = 1\end{cases}$



Tedy $\lim_{x\to 1_-}\hat f(x) = \hat f(1) = -\frac12$

Tedy $\hat f$ je spojitá na $[\frac12, 1]$.

Tedy $\int_{\frac12}^1 \hat f \in \mathbb{R}$. Ovšem $\int_{\frac12}^1 f = \int_{\frac12}^1 \hat f$.

Celkem: $\int_0^1 f = \int_0^{\frac12} f + \int_{\frac12}^1 f \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ tj. $\hookrightarrow$ K. △

[7247] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{\underbrace{1+x^2}_{f(x)}}\,dx$

„U nuly": analogicky jako [7246].

srovnej s $g(x) = \ln x \Longrightarrow \int_0^1 f$ K.

„U ∞": $f(x) = \dfrac{\overbrace{\ln x}^{\to\infty}}{\underbrace{1+x^2}_{\to\infty}}$ $\qquad \int_1^\infty f$

SLEPÁ ULIČKA $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. $\quad$ LSK:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\cdot x^2 = \lim_{x\to\infty} \overbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}^{\to 1}\cdot \overbrace{\ln x}^{\to\infty} = \infty$$

$\Rightarrow \left[\int_1^\infty f \text{ K} \Longrightarrow \int_1^\infty g \text{ K}.\right]$

Zkusme ln nahradit mocnějším kazisvětem.

Třeba $\sqrt{x}$! $\longrightarrow g_1(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2} \longrightarrow g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$

- Víme: $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \infty \quad (\alpha = \tfrac{3}{2} > 1)$
- LSK: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{(l'H)}{\underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} 1\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x} = 2\lim\frac{1}{\sqrt{x}} = 2\cdot\frac{1}{\infty} = 0.$$

$\overset{LSK}{\Longrightarrow} \left[\int_1^\infty g \text{ K.} \Longrightarrow \int_1^\infty f \text{ K.}\right]$

$\Longrightarrow \int_1^\infty f$ K.

Celkem: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 f}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\int_1^\infty f}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$

Integrál konverguje.

[Z249] $\displaystyle\int_7^\infty \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,dx$

$x \to \infty$

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$

$$g_1(x) = \frac{\ln x}{x^{3/2}} \longrightarrow g_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x} \quad D.\,!$$

$$g_3(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^{6/4}} = \frac{1}{x^{5/4}} \quad K.$$

LSK: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g_3(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} \cdot x^{5/4} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x}} \overset{l'H}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \dots = 0.$$

$$\Rightarrow \left[\int_7^\infty g_3 \ K. \Longrightarrow \int_7^\infty f \ K.\right]$$

Ovšem antecedent platí: $\displaystyle\int \frac{1}{x^{5/4}}\,dx$ K. $\Leftarrow \frac{5}{4} > 1$.

Tedy $\displaystyle\int_7^\infty f$ K.

[Z248] $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p}\,dx$, $p \in \mathbb{R}$ parametr

„U ∞": $\displaystyle g(x) = \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$

- $\displaystyle\int_1 g(x)$ K $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $\alpha = p-1 > 1$ $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $\underline{\underline{p > 2}}$
- LSK: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x^p} \cdot x^{p-1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim \frac{x}{x} - \underbrace{\lim \frac{\sin x}{x}}_{\text{„omez. · nul."}} = 1 - 0$$

Tedy $\displaystyle\int_1^\infty f$ K. $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\int_1^\infty g$ K. $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $p > 2$.

„U 0": $\displaystyle\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Bez Taylora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^\alpha}$$

$\alpha = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} = 1-1 = 0$

$\alpha = 2$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2} = 0$

$\alpha = 3$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \underset{2\times L'H}{=} \lim \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

Vhodná srovnávací funkce má v čit. x^3:

$g(x) := \frac{x^3}{x^p}$ $\qquad \int_0^1 g = \int_0^1 \frac{1}{x^{p-3}}\,dx$ K $\iff$

$\alpha = p-3 < 1 \iff \boxed{p<4}$

LSK: $\lim \frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^p} \cdot \frac{x^p}{x^3} = \lim \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \in (0,\infty)$

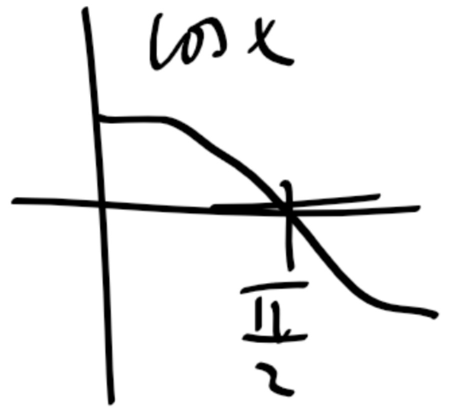
$\overset{LSK}{\Longrightarrow} \left[\int_0^1 f \text{ K.} \iff \int_0^1 g \text{ K.} \right] \iff p<4.$

Celkem: $\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx =$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx}_{K \iff p<4} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx}_{K \iff p>2}$$

I. K. $\iff p<4 \wedge p>2$

$\iff p \in (2,4)$.



[7250] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x \,dx$, $p,q \in \mathbb{R}$